

УДК 539.3

АНАЛИЗ НДС ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МКЭ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫСОКОТОЧНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА С КОРРЕКТИРУЮЩИМИ МНОЖИТЕЛЯМИ ЛАГРАНЖА

Ю.В. Клочков, О.В. Вахнина, Т.А. Киселева

Аннотация

Изложен алгоритм расчета тонких оболочек произвольной геометрии на основе высокоточного треугольного элемента дискретизации (ТЭД). Для решения проблемы совместности ТЭД по первым и вторым производным компонент вектора перемещения предлагается использовать в качестве дополнительных варьируемых параметров корректирующие множители Лагранжа в серединах сторон треугольного конечного элемента. Решения ряда тестовых задач показало высокую эффективность предлагаемой модификации ТЭД при расчете тонких оболочек.

Ключевые слова: Произвольная оболочка, метод конечных элементов, треугольный конечный элемент, множители Лагранжа, матрица жесткости, элемент дискретизации.

1. Геометрия оболочки

В конечно-элементном анализе тонких оболочек широко применяются элементы дискретизации треугольной формы [1,2,3].

При использовании теории тонких оболочек [4,5] деформации срединной поверхности являются функциями компонент вектора перемещения, а также их первых и вторых (для нормальной компоненты) производных по криволинейным координатам. В связи с этим фактом оптимальным следует считать включение в столбец узловых варьируемых параметров треугольного элемента дискретизации кроме компонент вектора перемещения их первых и вторых производных. Но высокоточные конечные элементы являются несовместными по производным компонент вектора перемещения, что приводит в ряде случаев к определенным проблемам [6,7].

Для устранения данной проблемы предлагается ввести в столбец узловых неизвестных высокоточного треугольного конечного элемента корректирующие множители Лагранжа в дополнительных узлах, расположенных в серединах сторон ТЭД.

Срединная поверхность произвольной оболочки в декартовой системе координат может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}. \quad (1)$$

Ковариантные векторы локального базиса точки срединной поверхности и их производные определяются дифференцированием (1)

$$\vec{a}_\alpha^0 = \vec{R}_{,\alpha}^0; \quad \vec{a}_{\alpha,\beta}^0 = \vec{R}_{,\alpha\beta}^0, \quad (2)$$

где под греческими индексами α, β понимаются глобальные координаты, например x и y .

Если произвольная оболочка имеет в сечении замкнутую линию, например эллипс, то использование формулы (1) не является вполне приемлемым. Так, при рассмотрении в качестве произвольной оболочки эллиптического цилиндра $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, эллиптического конуса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{(x-2)^2}{a^2} = 0$ или трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, применение формулы (2) приводит к необходимости соблюдения дополнительных условий

$$1 - \frac{y^2}{b^2} > 0, \frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0, 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 0 \quad (3)$$

для эллиптического цилиндра, конуса и эллипсоида соответственно. Здесь b и c - параметры эллипса, являющегося поперечным сечением рассматриваемой оболочки, a - параметр эллипсоида или эллиптического конуса.

Для устранения отмеченного выше недостатка и непрерывной параметризации срединной поверхности замкнутых оболочек произвольной геометрии радиус-вектор предлагается задавать в виде

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta) \sin \theta \vec{j} + r(x, \theta) \cos \theta \vec{k}, \quad (4)$$

где θ - угол, отсчитываемый против хода часовой стрелки от оси Oz , в плоскости, перпендикулярной оси Ox .

Входящая в (4) функция $r(x, \theta)$ зависит от типа рассчитываемой оболочки и для эллиптического цилиндра, конуса и эллипсоида имеет соответствующий вид

$$r(\theta) = \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}; \quad r(x, \theta) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}; \\ r(x, \theta) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}. \quad (5)$$

При использовании (4) ковариантные векторы локального базиса точки срединной поверхности оболочки и орт нормали определяются выражениями

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0; \quad \vec{a}^0 = (\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0) / \sqrt{a^0}, \quad (6)$$

где $a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2$ - детерминант метрического тензора.

Из соотношений (6) можно получить прямую и обратную матричные зависимости

$$\{\vec{a}^0\}_{3 \times 1} = [d]_{3 \times 1} \{\vec{i}\}_{3 \times 1}; \quad \{\vec{i}\}_{3 \times 1} = [d]^{-1}_{3 \times 1} \{\vec{a}^0\}_{3 \times 1}, \quad (7)$$

где $\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \ \vec{a}_2^0 \ \vec{a}^0\}$, $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}\}$.

Производные локальных векторов (6) с использованием (7) можно представить компонентами в базисе (6)

$$\{\vec{a}_{,x}^0\} = [m] \{\vec{a}^0\}; \quad \{\vec{a}_{,\theta}^0\} = [n] \{\vec{a}^0\}, \quad (8)$$

где $\{\vec{a}_{,x}^0\} = \{\vec{a}_{1,x}^0 \ \vec{a}_{2,x}^0 \ \vec{a}_{,x}^0\}$; $\{\vec{a}_{,\theta}^0\} = \{\vec{a}_{1,\theta}^0 \ \vec{a}_{2,\theta}^0 \ \vec{a}_{,\theta}^0\}$.

Положение точки в произвольном слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ , до и после деформирования определяется радиус-векторами

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (9)$$

Входящий в (9) вектор перемещения произвольной точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ , при использовании гипотезы прямой нормали определится выражением

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{a} - \vec{a}^0), \quad (10)$$

где \vec{a} - орт нормали к срединной поверхности оболочки в деформированном состоянии.

Входящий в (10) вектор перемещения точки срединной поверхности, его первые и вторые производные по глобальным координатам x и θ определяются по формулам

$$\vec{v} = v^\rho \vec{a}_\rho^0 + v \vec{a}^0; \vec{v}_{,\alpha} = t_\alpha^\rho \vec{a}_\rho^0 + t_\alpha \vec{a}^0; \vec{v}_{,\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}^\rho \vec{a}_\rho^0 + t_{\alpha\beta} \vec{a}^0, \quad (11)$$

где v^ρ , v - тангенциальные и нормальная компоненты вектора перемещения; t_α^ρ , t_α , $t_{\alpha\beta}^\rho$, $t_{\alpha\beta}$ - многочлены, содержащие компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности и их первые (для t_α^ρ , t_α) и вторые (для $t_{\alpha\beta}^\rho$, $t_{\alpha\beta}$) производные.

Ковариантные компоненты тензора деформаций определяются соотношением механики сплошной среды [8]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0) / 2. \quad (12)$$

Входящие в (12) ковариантные компоненты метрического тензора исходного и деформированного состояний определяются скалярными произведениями соответствующих векторов базиса

$$g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0; g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta, \quad (13)$$

где $\vec{g}_\alpha^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta}$; $\vec{g}_\alpha = \vec{R}_{,\alpha}^\zeta$.

2. Треугольный элемент дискретизации с корректирующими множителями Лагранжа

Столбец узловых неизвестных ТЭД в глобальной x , θ системе координат первоначально был выбран в виде

$$\left\{ U_y^\Gamma \right\}_{1 \times 54}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1\Gamma} \right\}_{1 \times 18}^T \left\{ v_y^{2\Gamma} \right\}_{1 \times 18}^T \left\{ v_y^\Gamma \right\}_{1 \times 18}^T \right\}, \quad (14)$$

где

$$\left\{ q_y^\Gamma \right\}_{1 \times 18}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,x}^i q_{,x}^j q_{,x}^k q_{,\theta}^i q_{,\theta}^j q_{,\theta}^k q_{,xx}^i q_{,xx}^j q_{,xx}^k q_{,\theta\theta}^i q_{,\theta\theta}^j q_{,\theta\theta}^k q_{,x\theta}^i q_{,x\theta}^j q_{,x\theta}^k \right\}.$$

Здесь под q^m ($m = i, j, k$) понимаются тангенциальные v^1, v^2 или нормальная v компоненты векторов перемещений узлов i, j, k ТЭД (см. рис. 1).

В качестве дополнительных узлов ТЭД I можно рассмотреть точки в серединах сторон 1, 2, 3, которые одновременно являются дополнительными узлами соседних ТЭД II, III, IV (см. рис. 1). В этих узлах должны выполняться равенства для первых и вторых производных нормальной компоненты вектора перемещения по направлениям нормалей \vec{n}_l ($l = 1, 2, 3$)

$$\partial v / \partial \vec{n}_l = -\partial v' / \partial \vec{n}_l'; \quad \partial^2 v / \partial \vec{n}_l^2 = \partial^2 v' / \partial \vec{n}_l'^2, \quad (15)$$

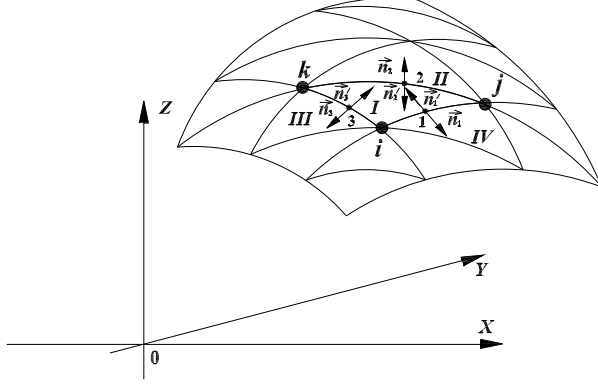


Рис. 1. Фрагмент оболочки

где штрихом обозначены компоненты и нормали смежных с ТЭД I элементов дискретизации.

Однако, в силу несовместности рассматриваемого ТЭД равенства (15) точно не выполняются. Поэтому с целью устранения отмеченного недостатка предлагается записать (15) в виде

$$\lambda_l \left(\partial v / \partial \vec{n}_l + \partial v' / \partial \vec{n}_l' \right) = 0; \quad \lambda_t \left(\partial^2 v / \partial \vec{n}_l^2 - \partial^2 v' / \partial \vec{n}_l'^2 \right) = 0, \quad (16)$$

где $t = 4, 5, 6$.

Для отдельного ТЭД под номером I будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_1 (\partial v / \partial \vec{n}_1) + \lambda_2 (\partial v / \partial \vec{n}_2) + \lambda_3 (\partial v / \partial \vec{n}_3) &= 0; \\ \lambda_4 (\partial^2 v / \partial \vec{n}_1^2) + \lambda_5 (\partial^2 v / \partial \vec{n}_2^2) + \lambda_6 (\partial^2 v / \partial \vec{n}_3^2) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Первые и вторые производные нормальной компоненты вектора перемещения в направлении внешней нормали могут быть выражены через соответствующие производные нормальной компоненты вектора перемещения по глобальным криволинейным координатам x, θ

$$\begin{aligned} \partial v / \partial \vec{n}_l &= [(\partial v / \partial x)_l \cos \alpha_l + (\partial v / \partial \theta)_l \cos \beta_l]; \\ \partial^2 v / \partial \vec{n}_l^2 &= [(\partial^2 v / \partial x^2)_l \cos^2 \alpha_l + \\ &+ 2 (\partial^2 v / \partial x \partial \theta)_l \cos \alpha_l \cos \beta_l + (\partial^2 v / \partial \theta^2)_l \cos^2 \beta_l], \end{aligned} \quad (18)$$

где α_l и β_l – углы между векторами нормалей \vec{n}_l и касательными векторами локального базиса \vec{a}_{1l}^0 и \vec{a}_{2l}^0 .

Используя в качестве функций формы ТЭД полные полиномы пятой степени [9], выражения (18) могут быть записаны в виде

$$\partial v / \partial \vec{n}_l = \{F_l'\}_{1 \times 54}^T \{U_y^\Gamma\}_{54 \times 1}^T; \quad \partial^2 v / \partial \vec{n}_l^2 = \{F_l''\}_{1 \times 54}^T \{U_y^\Gamma\}_{54 \times 1}^T. \quad (19)$$

С учетом (19) соотношения (17) могут быть представлены в матричной форме

$$\{\lambda'\}_{1 \times 3}^T [G']_{3 \times 54} \{U_y^\Gamma\}_{54 \times 1}^T = 0; \quad \{\lambda''\}_{1 \times 3}^T [G'']_{3 \times 54} \{U_y^\Gamma\}_{54 \times 1}^T = 0, \quad (20)$$

где $\{\lambda'\}_{1 \times 3}^T = \{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\}$; $\{\lambda''\}_{1 \times 3}^T = \{\lambda_4 \lambda_5 \lambda_6\}$;

$$[G']_{3 \times 54} = \begin{bmatrix} \{F'_1\} \\ \{F'_2\} \\ \{F'_3\} \end{bmatrix}; [G'']_{3 \times 54} = \begin{bmatrix} \{F''_1\} \\ \{F''_2\} \\ \{F''_3\} \end{bmatrix}.$$

Функционал Лагранжа для ТЭД может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Pi = \int_V \{\varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta\}^T \{\sigma_{\rho\gamma}\} dV - \int_F \{U\}^T \{P\} dF + \\ + \lambda' \left(\partial v / \partial \bar{n}_l - \partial v' / \partial \bar{n}'_l \right) + \lambda'' \left(\partial^2 v / \partial \bar{n}_l^2 + \partial^2 v' / \partial \bar{n}'_l^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\{\varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta\}, \{\sigma_{\rho\gamma}\}$ – деформации и напряжения в слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ ; $\{P\}$ – столбец внешней нагрузки; $\{U\}^T = \{v^1 v^2 v\}$ – матрица-строка, содержащая компоненты вектора перемещения точки внутренней области ТЭД.

Учитывая (20) и стандартные для МКЭ матричные преобразования [3, 10], функционал (21) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \Pi = \{U_y^\Gamma\}^T [PR]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV [PR] \{U_y^\Gamma\} - \{U_y^\Gamma\}^T [PR]^T \times \\ \times \int_F [A]^T \{P\} dF + \{\lambda'\}^T [G'] \{U_y^\Gamma\} + \{\lambda''\}^T [G''] \{U_y^\Gamma\} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $[PR]$ – матрица преобразования узловых неизвестных в локальной $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ системе координат к столбцу (14); $[B]$ – матрица функции формы и их производных в соответствии с соотношениями Коши; $[C]$ – матрица упругости; $[\Gamma]$ – матрица перехода от $\{\varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta\}$ к деформациям срединной поверхности $\{\varepsilon_{\rho\gamma}\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} 2\varepsilon_{12} \chi_{11} \chi_{22} 2\chi_{12}\}$; $[A]$ – матрица, содержащая функции формы ТЭД [9].

Выполняя минимизацию функционала (21) по $\{U_y^\Gamma\}^T$, $\{\lambda'\}^T$ и $\{\lambda''\}^T$ можно получить три системы уравнений

$$\begin{cases} \partial \Pi / \partial \{U_y^\Gamma\}^T = [K] \{U_y^\Gamma\} - \{R\} + [G']^T \{\lambda'\} + [G'']^T \{\lambda''\} = 0; \\ \partial \Pi / \partial \{\lambda'\}^T = [G'] \{U_y^\Gamma\} = 0; \\ \partial \Pi / \partial \{\lambda''\}^T = [G''] \{U_y^\Gamma\} = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $[K]$, $\{R\}$ – матрица жесткости и столбец узловой нагрузки ТЭД [9].

Для удобства конечно-элементной реализации описанного выше алгоритма систему (23) можно представить в следующем виде

$$[K_p] \{U_{yp}^\Gamma\} - \{R_p\} = 0, \quad (24)$$

где $[K_p]$, $\{U_{yp}^\Gamma\}$, $\{R_p\}$ – расширенная матрица жесткости, столбец узловых неизвестных и столбец узловых усилий ТЭД с корректирующими множителями

$$\begin{aligned} \text{Лагранжа } [K_p]_{60 \times 60} = \begin{bmatrix} [K]_{54 \times 54} & [G']_{3 \times 54}^T [G'']_{3 \times 54}^T \\ [G']_{54 \times 3} & 0 \\ [G'']_{54 \times 3} & 0 \end{bmatrix}; \\ \{R_p\}_{1 \times 60}^T = \left\{ \{R\}_{1 \times 54}^T \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\}^T; \{U_{yp}^\Gamma\}_{1 \times 60}^T = \left\{ \{U_y^\Gamma\}_{1 \times 54}^T \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \right\}. \end{aligned}$$

3. Пример 1

Был рассчитан круговой цилиндр, нагруженный вдоль образующей равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (см. рис. 2).

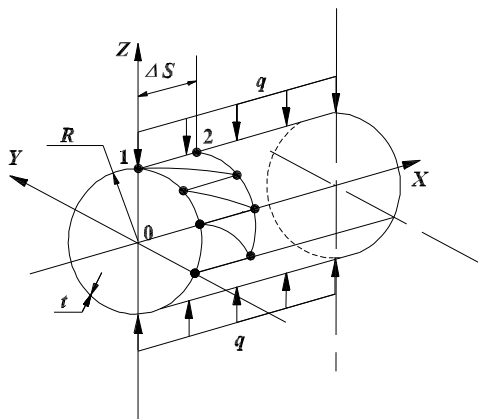


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка

Были приняты следующие исходные данные: $q = 0,1$ Н/см; $R = 10$ см; $t = 0,1$ см; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^7$ Н/см². Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась $\frac{1}{4}$ часть цилиндра, которая представлялась одной полоской элементов, ориентированной в кольцевом направлении шириной $\Delta S = 1,0$ см.

Расчеты были выполнены в трех вариантах: в первом варианте использовался ТЭД с размером матрицы жесткости 54×54 без множителей Лагранжа [6], во втором варианте корректирующие множители Лагранжа были применены только к первым производным нормальной компоненты вектора перемещения в направлении \vec{n}_l . При этом размер матрицы жесткости составил 57×57 . В третьем варианте описанный выше алгоритм совершенствования ТЭД с помощью корректирующих множителей Лагранжа был реализован в полном объеме.

Результаты повариантного расчета представлены в таблице 1, в которой приведены численные значения кольцевых напряжений на внутренней $\sigma_k^в$ и наружной $\sigma_k^н$ поверхностях цилиндра в точках 1 и 2 (см. рис. 2) в зависимости от густоты сетки дискретизации ТЭД. Анализ табличного материала показывает, что в первом варианте отсутствует сходимость вычислительного процесса. Кроме того, напряжения, вычисленные в точках 1 и 2, существенно различаются между собой, тогда как по условиям задачи они должны быть одинаковыми. Во втором варианте наблюдается некоторое улучшение сходимости вычислительного процесса. Однако, с увеличением числа элементов дискретизации погрешность вычислений значительно увеличивается и становится неприемлемой. В третьем варианте результаты вычислений можно признать вполне удовлетворительными. Наблюдается быстрая сходимость вычислительного процесса. Напряжения, вычисленные в точках 1 и 2 практически совпадают. Выбранная расчетная схема позволяет сравнить полученные значения напряжений с решением, полученным по формулам сопротивления

материалов [11]

$$\sigma = (0,318 \cdot q \cdot R)/W, \quad (25)$$

где $W = t\Delta S^2/6$.

При подстановке исходных данных в (25) можно получить

$$\sigma = (0,318 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 6)/(0,01 \cdot 1^2) = 190,8 \text{ Н/см}^2.$$

Сопоставляя значение σ , вычисленное по формуле (25), с табличными значениями третьего варианта, можно отметить их практическое совпадение.

Таблица 1.

Сетка узлов	Напряжения, МПа	Варианты расчета		
		54x54	57x57	60x60
13x2	σ_1^B	335,373	197,211	190,986
	σ_1^H	-312,738	-197,852	-190,986
	σ_2^B	121,014	184,217	190,985
	σ_2^H	-138,029	-183,764	-190,986
25x2	σ_1^B	346,222	219,888	190,986
	σ_1^H	-328,963	-220,195	-190,986
	σ_2^B	209,275	161,042	190,986
	σ_2^H	-220,154	-160,975	-190,986
33x2	σ_1^B	324,519	227,218	190,984
	σ_1^H	-311,888	-227,300	-190,984
	σ_2^B	251,258	153,666	190,984
	σ_2^H	-258,462	-153,757	-190,984

4. Пример 2

Был рассчитан жестко заземленный по торцам цилиндр, нагруженный внутренним давлением интенсивности q . Были приняты следующие исходные данные: $q = 5$ МПа; $R = 100$ см; $t = 2,0$ см; $\nu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $L = 100$ см. Расчеты, как и в примере 1, выполнялись в трех вариантах. Результаты по-вариантного расчета представлены в таблице 2, в которой приведены значения меридиональных напряжений на внутренней σ_m^B и наружной σ_m^H поверхностях цилиндра в жесткозаземленном торце в зависимости от густоты сетки дискретизации. Вследствие наличия осевой симметрии рассматривался фрагмент цилиндра ($0 \leq x \leq \frac{L}{2}$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{60}$). Как видно из таблицы 2, варианты расчета существенно различаются между собой. В первом варианте отсутствует сходимость вычислительного процесса. Кроме того, напряжения в точке с координатами $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{60}$ в разы различаются между собой, тогда как по условиям задачи они должны быть одинаковыми. Во втором варианте наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса, однако, со сгущением сетки элементов дискретизации процент расхождения напряжений в двух контролируемых точках имеет тенденцию к увеличению и постепенно возрастает с 2% до 6%. В третьем варианте можно констатировать устойчивую сходимость полученных значений напряжений, а расхождения численных значений контролируемых параметров НДС в точках $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{60}$ не превышает 0,14%.

Таблица 2.

	Координаты точек $x; \theta$		$x=L/2; \theta = 0.0$		$x=L/2; \theta = \pi/60$	
	Напряжения, МПа		σ_M^B	σ_M^H	σ_M^B	σ_M^H
Варианты	54x54	4x13	297.9	-178.2	651.9	-531.7
		4x17	247.1	-127.1	720.2	-599.9
		4x21	230.2	-110.0	760.1	-639.6
расчета	57x57	4x13	475.7	-356.3	482.9	-363.6
		4x17	471.3	-351.9	485.3	-365.9
		4x21	466.8	-347.5	488.3	-368.9
	60x60	4x13	481.0	-361.7	481.0	-361.7
		4x17	480.9	-361.6	481.1	-361.8
		4x21	480.8	-361.5	481.4	-362.0

5. Вывод

Основываясь на анализе табличного материала, представленного в таблицах 1 и 2, можно сделать окончательный вывод о том, что при расчете оболочек с локальным приложением нагрузок или имеющих жесткое опирание необходимо использовать только усовершенствованные ТЭД с корректирующими множителями Лагранжа. Применение в расчетах тонких оболочек стандартных ТЭД, даже и имеющих высокую (пятую) степень интерполяционных полиномов, не позволяет получить удовлетворительный результат.

Summary

Yu. V. Klotchkov, O. V. Vakhnina, T. A. Kiseleva.

Analysis VAT of arbitrary shallow shells based on using FEM precision triangular finite elements with a correction of the Lagrange multipliers.

The algorithm for calculating thin shells of arbitrary geometry on the basis of high-precision bin (TED) of the triangular shape. To solve the problem of compatibility of TED for the first and second derivatives of the components of the displacement vector is proposed to use as additional variable parameters adjusting the Lagrange multipliers at the midpoints of the triangular finite element. Solutions a number test problems showed high effectiveness of the proposed modification in the calculation of the TED thin shells.

Key words: Arbitrary shell, finite element method, triangle element, Lagrangian coefficients, matrix features, element of diskretization.

Литература

- 1 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
- 2 Батэ К.-Ю. Методы конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1022 с.
- 3 Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
- 4 Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судостроение, 1962. – 432 с.
- 5 Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
- 6 Клочков Ю.В., Николаев А.П., Гуреева Н.А. Сравнительный анализ эффективности использования конечных элементов треугольной и четырехугольной форм в расчетах оболочек вращения // Известия вузов. Строительство. – 2004. – № 3. – С. 103–109.
- 7 Клочков Ю.В., Николаев А.П., Гуреева Н.А. Сравнительная оценка точности конечно-элементных решений оболочек при использовании высокоточных конечных элементов треугольной и четырехугольной форм // Известия вузов. Машиностроение. – 2003. – № 10. – С. 3–10.
- 8 Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

9 Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. Особенности формирования матрицы жесткости треугольного конечного элемента размером 54×54 // Известия вузов. Строительство. – 1998. – № 2. – С. 32–37.

10 Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

11 Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

Клочков Юрий Васильевич – Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой "Высшая математика Волгоградский государственный аграрный университет

E-mail: *Klotchkov@bk.ru*

Вахнина Ольга Владимировна – Кандидат технических наук, доцент кафедры "Высшая математика Волгоградский государственный аграрный университет

E-mail: *Ovahnina@bk.ru*

Киселева Татьяна Алексеевна – Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры "Высшая математика Волгоградский государственный аграрный университет

E-mail: *kiseleva_ta@ro.ru*